

# АЛГЕБРА

I. Решете уравненията и системите уравнения:

$$1. \frac{x}{x+1} + \frac{2}{x-2} = \frac{3}{x^2-x-2}$$

$$2. \frac{x}{x-2} + \frac{8}{4-x^2} = \frac{5}{3}$$

$$3. \frac{4x-5}{x^2+6x+9} + \frac{x-1}{x+3} = 1$$

$$4. \frac{2}{x^2-4} + \frac{x-4}{x^2+2x} = \frac{1}{x^2-2x}$$

$$5. \frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = \frac{29}{10}$$

$$6. (x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24=0$$

$$7. \frac{11-2x}{x-3} - \frac{3}{x-2} = \frac{3}{x^2-5x+6}$$

$$8. \frac{12x^2+30x-21}{16x^2-9} = \frac{3x-7}{3-4x} + \frac{6x+5}{4x+3}$$

$$9. \sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 3$$

$$10. \sqrt{2x+6} - \sqrt{x-1} = 2$$

$$11. \sqrt{x^2+11} + x^2+11 = 42$$

$$12. (x-1) \cdot \sqrt{x^2-x-2} = 0$$

$$13. \sqrt{\frac{x+5}{x}} + 3 \cdot \sqrt{\frac{x}{x+5}} = 4$$

$$14. \sqrt{25-x} + \sqrt{9-x} = 8$$

$$15. \sqrt{x+5} + \sqrt{x+3} = 2$$

$$16. \begin{cases} x-y=3 \\ x^2-xy-y^2=11 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x^2+2y^2+3xy=12 \\ y^2-3y=4 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 2x-y=4 \\ (x-1)^2+(y+2)^2=20 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} xy-x+y=7 \\ xy+x-y=13 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x^2+y^2+x=3 \\ x^2-3xy+2y^2=0 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-y=3 \end{cases}$$

## II. Решете неравенствата и системите неравенства:

$$1. \frac{x^3-x^2+x-1}{x+8} \leq 0$$

$$2. \frac{x^3+x^2+x}{9x^2-25} \geq 0$$

$$3. \frac{(x-2)(3+2x)(x^2-x+8)}{x^2+4} > 0$$

$$4. \frac{3x^2-2x+3}{4x^2-7x+9} > 0$$

$$5. \frac{3x+2}{7-x} \leq 3$$

$$6. \frac{x-11}{x^2-4x-5} \leq 3$$

$$7. \begin{cases} \frac{2x-3}{2} - \frac{x}{2} > x+1 \\ \frac{x-2}{3} - 2x > 5 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x^2-6x+8 \leq 0 \\ (x-1)(x-2)(x-3) > 0 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x^2-4x+3 > 0 \\ x^2-6x+8 < 0 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x^3-x^2 \geq 0 \\ x^2-2x+1 \leq 0 \end{cases}$$

### III. Степен и логаритъм. Показателна функция

A) Определете ДМ на функцията:

1.  $\log_{x-2}(5-x^2)$

2.  $\lg(x^2+5x+6)$

3.  $\log_x(9-x^2)$

4.  $\log_{x-1}\left(\frac{x^2-4}{5-x^2}\right)$

5.  $\log_{0,1}\left(\frac{x^2+5}{2}\right)$

6.  $\log_{x-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2-x}\right)$

7.  $\log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{x-2}{4-x}\right)$

8.  $\log_{x+2}(4x-x^2)$

Б) Пресметнете:

1.  $\left(\frac{1}{16}\right)^{\log_4 15}$

2.  $3^{1+\log_3 11}$

3.  $\sqrt{2}^{\log_2 9+2}$

4.  $2^{\log_2 81} \cdot 3^{2-\log_3 5} + 5^{1+2\log_5 8}$

5.  $5^{2+2\log_5 7} + 2^{7-2\log_2 4} \cdot 3^{\log_3 8}$

6.  $5^{2-\log_5 2} + 3^{1+\log_3 4}$

7.  $25^{\log_{\sqrt{5}} 2}$

8.  $2^{-4\log_2 0,1}$

9.  $3^{-\frac{1}{3}\log_3 8}$

10.  $3^{2-\log_{\sqrt{3}} 2}$

В) Решете уравненията:

1.  $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2} = \frac{3}{2}$

2.  $2^{2x-3} = 4\sqrt{2}$

3.  $\left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{1-x} = 0,6$

4.  $3^x = \left(9^{-\frac{1}{3}}\right)^6 \cdot 27^{0,5}$

$$5. \sqrt[3]{9^{3x-1}} = 81^{-\frac{2}{3}}$$

$$6. (10^{5-x})^{6-x} = 100$$

$$7. \log_{\frac{1}{2}} 16 = x$$

$$8. \log_{\sqrt{8}} 2 = x$$

$$9. \log_{4\sqrt[3]{4}} x = -\frac{3}{4}$$

$$10. \log_x 81 = 4$$

$$11. \log_2 x = \log_2 4$$

$$12. 2^{2\log_2 x} - x = 6$$

Г) Решете неравенствата:

$$1. \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x-2}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x-1}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$2. 3^{0,5x-2,5} > 3\sqrt{3}$$

$$3. 0,5^{3x+1} \geq 0,5^{x-1}$$

$$4. \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{x^2-2x}{x^2}} \geq 1$$

$$5. \lg(3x^2-2x) < \lg(5x-4)$$

$$6. \left(\frac{1}{8}\right)^{2x} > \sqrt{\frac{1}{8}}$$

$$7. \log_x 7 > \log_x$$

$$8. \log_{\frac{1}{2}} x < 0$$

$$9. \log_2(x+5) > \log_2 9$$

Д) Изчислете изразите:

$$1. 2\log_2 8 + 4\log_3 27$$

$$2. 5\log_4 2 - 3\log_2 1$$

$$3. 5\log_2 \frac{1}{16} + 3\log_5 25$$

$$4. 4\log_{0,1} 0,01 - 5\log_2 \frac{1}{8}$$

$$5. \frac{1}{2} \log_2 16 - 3\log_2 \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \log_2 32 - 2\log_2 \frac{1}{8}$$

$$6. 5\log_5 25 + 8\log_{16} 64 - 4\log_9 27 + \log_{\sqrt{5}} 5 + \log_{0,5} 1$$

#### IV. Тригонометрични преобразования:

1. Ако  $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ , намерете  $\sin\alpha$ ,  $\cos\alpha$ ,  $\operatorname{ctg}\alpha$
2. Ако  $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{3}$ ,  $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ , намерете  $\sin\alpha$ ,  $\cos\alpha$
3. Ако  $\frac{3\sin\alpha + \cos\alpha}{3\cos\alpha - 2\sin\alpha} = 6$ , намерете  $\operatorname{tg}\alpha$
4. Ако  $\operatorname{tg}\alpha = 0,2$ , намерете  $\frac{5}{\sin 2\alpha}$
5. Ако  $\operatorname{tg}x = 3$ ,  $x \in (0^\circ; 90^\circ)$ , пресметнете стойността на израза  $A = 2 \cos x - \sin x$
6. Ако  $\cos\alpha = \frac{7}{25}$ ,  $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ , пресметнете  $\sin(\alpha + 30^\circ)$
7. Пресметнете  $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$
8. Докажете:
  - a)  $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$
  - b)  $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta = \sin(\alpha + \beta)$
  - c)  $\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos\alpha + 1 - 2\sin^2 2\alpha} = 2\sin\alpha$

#### V. Прогресии:

1.  $\div$   $a_2 + a_7 = -121$   
 $a_3 + a_5 = -128$ , намерете  $n$ .  
 $S_n = -535$
2.  $\div$   $n=12$ ,  $d=7$ ,  $S_n = 606$ , намерете  $a_1$  и  $a_n$
3.  $\div$   $a_1 + a_3 + a_5 = 63$   
 $a_2 + a_6 = 50$ , намерете  $S_{16}$
4. Дадена е геометрична прогресия  $\left| \begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 = 14 \\ a_4 + a_5 + a_6 = 112, \text{ намерете } n. \\ S_n = 510 \end{array} \right.$
5. Дадена е геометрична прогресия  $\left| \begin{array}{l} a_5 - a_2 + a_4 = 66 \\ a_4 - a_1 + a_3 = 33, \text{ намерете } S_n \end{array} \right.$

6. Дадена е геометрична прогресия с  $q = \frac{1}{2}$ ,  $n = 10$ ,  $a_n = 7$ . Намерете  $a_1$  и  $S_n$

## ГЕОМЕТРИЯ

**I. Подобни триъгълници. Свойство на ъглополовящата. Метрични зависимости в правоъгълен триъгълник и равнобедрен трапец.**

**Зад. 1** Около окръжност с диаметър 15 см е описан равнобедрен трапец с бедро 17 см. Да се намерят основите на трапеца.

**Зад. 2** Даден е равнобедрен триъгълник ABC с основа 16 см и бедро 17 см. Намерете радиуса на вписаната в триъгълника ABC окръжност и лицето му.

**Зад. 3** В правоъгълен триъгълник ABC ( $\angle C = 90^\circ$ ),  $AC = 4$  см ;  $BC = 3$  см. Намерете медианата към AC, ъглополовящата към хипотенузата и радиуса на вписаната окръжност. Намерете бедрата и диагоналите на трапеца.

**Зад. 4** Трапец с основи 8 см и 2 см и височина 4 см е вписан в окръжност. Намерете бедрата и диагоналите на трапеца.

**Зад. 5** В равнобедрен триъгълник ABC  $AB = 6$  см и  $AC = BC = 5$  см. Намерете  $h_c, h_a, r$ .

**Зад. 6** В правоъгълен триъгълник  $h_c$  разделя хипотенузата на части, които се отнасят както 2:3. Намерете катетите и височината, ако хипотенузата е 5 см.

**Зад. 7** Даден е триъгълник ABC ( $\angle C = 90^\circ$ ), в който дължините на проекциите на катетите върху хипотенузата са 36 см и 64 см. Намерете катетите и медианата към BC.

**Зад. 8** Основите на равнобедрен трапец имат големина 14 см и 4 см, а бедрото е 13 см. Намерете диагоналите на трапеца.

**Зад. 9** Даден е правоъгълен триъгълник с катет  $BC = 16$  и хипотенуза  $AB = 20$  см. Намерете бедрото и голямата основа на трапеца.

**Зад. 10** Диагоналът на равнобедрен трапец е 15 см, височината му е 12 см, а малката основа е 4 см. Намерете бедрото и голямата основа на трапеца.

**Зад. 11** В окръжност с радиус 12,5 см е вписан равнобедрен триъгълник ABC с височина  $h_c = 16$  см. Намерете страните на триъгълника ABC.

**Зад. 12** Даден е равнобедрен триъгълник ABC,  $AC = BC = 5$  см, а синусът на ъгъла при основата му е  $\frac{4}{5}$ . Намерете височината и основата на триъгълника.

**II. Синусова и косинусова теореми. Лица на равни фигури.**

**Зад. 1** Около триъгълник ABC  $AB = 4$  см, ъгълът  $A = 60^\circ$  е описана окръжност с радиус 2 см. Намерете

- Другите две страни;
- Лицето на триъгълника ABC.

**Зад. 2** Лицето на равнобедрен трапец, описан около окръжност е  $50 \text{ cm}^2$ , а острият ъгъл при голямата основа е  $30^\circ$ . Да се намери бедрото на трапеца.

**Зад. 3** Да се намерят височините на успоредника със страни 15 и 20 и диагонал 25 см.

**Зад. 4** Страните на триъгълника ABC са 6, 7 и 11 см. Определете:

- Медианата към най-голямата страна;
- Вида на триъгълника;
- $r$  и  $R$ .

**Зад. 5** В трапец  $AB = 50$  см,  $AD = 30$  см,  $AD \perp BD$ , диагоналът разполовява ъгъл BAD. Да се намери лицето на трапеца.

**Зад. 6** Около окръжност с радиус 10см е описан четириъгълник с взаимно перпендикулярни диагонали, които са 30 и 28 см. Да се намери периметърът на четириъгълника.

**Зад. 7** Две от страните на триъгълника са 10 и 14см, ъгълът срещу по-малката страна е  $45^\circ$ . Да се намери:

а) лицето на триъгълника;

б) R.

**зад. 8** Около окръжност е описан равнобедрен трапец с основи 8 и 2. Да се намери лицето на трапеца.

**Зад. 9** Около окръжност с радиус 4см е описан четириъгълник с лице  $72\text{cm}^2$ , двете страни на които са 6 и 8. Да са намерят другите две страни на четириъгълника.

**Зад. 10** Лицето на триъгълника ABC е  $56\text{cm}^2$ ,  $AC=14\text{cm}$ , ъгъл  $BAC=45^\circ$ .

Намерете:

а) другите две страни;

б)  $h_c$ ;

в) R.

**Зад. 11** Даден е трапецът ABCD,  $AB=8$ ,  $CD=3$ ,  $BC=6$ ,  $AD=9$ . Намерете:

а) лицето на трапеца;

б)  $\cos \beta$ .

**Зад. 12** Да се намери лицето на успоредника със страни 14 см и диагонали 26см и 30см.

**Зад. 13** Даден е ромб ABCD със страна 2 см и ъгъл  $A=60^\circ$ . Върху BC и CD са избрани т.М и т.N, така че  $MC+CN = 2$ . Продълженията на AN и BM се пресичат в т.Е и  $NE=2\sqrt{10}$ . Да се намери ME.